1　概要

ここでは、計算尺のメモリの一般論について紹介します。また、そこから、具体的な尺を見てみます。

2　メモリ

計算尺において、計算尺の横の長さを l, 利用したい関数を $f(x)$, 初期条件を x_0 とすると、F 尺のメモリ x は計算尺の左端から位置 y に書かれています。ここで y は次の通り。

$$y = l \log \frac{f(x)}{f(x_0)} \tag{2.1}$$

対数の公式、

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b \tag{2.2}$$

を使うと、式 (2.1) は、

$$\begin{align} y &= l \log f(x) - l \log f(x_0) \tag{2.3} \\ &= l \log f(x) - a \tag{2.4} \end{align}$$

となりますので、$l \log f(x)$ でメモリが振られていることになります。特に、$x = x_0$ のとき $y = 0$ となり、$f(x) = 10f(x_0)$ つまり $x = f^{-1}(10f(x_0))$ のとき $y = l$ となります。

3　D 尺と C 尺

D 尺と C 尺は、それらが固定尺にあるか、滑尺にあるかの違いがあるだけで、基本的には同じです。そのメモリは、$f(x) = x$, $x_0 = 1$ であり、式 (2.1) に代入すると、

$$\begin{align} y &= l \log \frac{f(x)}{f(1)} \tag{3.1} \\ &= l \log \frac{x}{1} \tag{3.2} \\ &= l \log x \tag{3.3} \end{align}$$

となります。これが D 尺と C 尺をあらわす式です。

4　F 尺が滑尺にある場合

F 尺が滑尺にある場合、固定尺にある D 尺と利用することで掛け算や割り算を行うことができます。

では、D 尺の a に F 尺の b をあわせ、カーソル線を F 尺の c に合わせたとしましょう。すると、カーソル線は D 尺の左の基線から次だけの距離 y にあります。

$$y = l\log a + l\log\frac{f(c)}{f(x_0)} - l\log\frac{f(b)}{f(x_0)} \tag{4.1}$$

$$= l\log\left(a \times \frac{f(c)}{f(x_0)} \times \frac{f(x_0)}{f(b)}\right) \tag{4.2}$$

$$= l\log\frac{af(c)}{f(b)} \tag{4.3}$$

となります。これを D 尺のメモリで読めば、

$$l\log(x) = l\log\frac{af(c)}{f(b)} \tag{4.4}$$

$$x = \frac{af(c)}{f(b)} \tag{4.5}$$

となります。これはすなわち、$f(x)$ に関する掛け算と割り算ができるということを表しています。

5　F 尺が固定尺にある場合

F 尺が固定尺にある場合、滑尺にある C 尺と利用することで掛け算や割り算を行うことができます。

では、F 尺の a に C 尺の b をあわせ、カーソル線を C 尺の c に合わせたとしましょう。すると、カーソル線は F 尺の左の基線から次だけの距離 y にあります。

$$y = l\log\frac{f(a)}{f(x_0)} + l\log c - l\log b \tag{5.1}$$

$$= l\log\left(\frac{f(a)}{f(x_0)} \times \frac{c}{b}\right) \tag{5.2}$$

となります。これを F 尺のメモリで読めば、

$$l \log \frac{f(x)}{f(x_0)} = l \log \left(\frac{f(a)}{f(x_0)} \times \frac{c}{b} \right) \tag{5.3}$$

$$f(x) = \frac{c}{b} f(a) \tag{5.4}$$

$$x = f^{-1} \left(\frac{c}{b} f(a) \right) \tag{5.5}$$

となります。これはすなわち、$f(x)$ に関する掛け算と割り算ができるということを表しています。注意していただきたいのは、F 尺が滑尺にあるときは D 尺で読み、F 尺が固定尺にある時は F 尺で読むので、後者では $x =$ の式が f^{-1} という形をしているという点です。つまり、F 尺が固定尺にある場合と滑尺にある場合では、できる計算が違うということです。

6　A 尺と B 尺

6.1　メモリ

A 尺と B 尺は、それらが固定尺にあるか、滑尺にあるかの違いがあるだけで、基本的には同じです。そのメモリは、$f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ であり、式 (2.1) に代入すると、

$$y = l \log \frac{f(x)}{f(1)} \tag{6.1}$$

$$= l \log \frac{\sqrt{x}}{1} \tag{6.2}$$

$$= l \log \sqrt{x} \tag{6.3}$$

となります。これが A 尺と B 尺をあらわす式です。また、この式を変形すると、

$$y = \frac{1}{2} l \log x \tag{6.4}$$

となります。これは、C 尺や D 尺のメモリを半分に圧縮したものであるということがわかります。

6.2　A 尺・B 尺と D 尺による計算

B 尺は滑尺にあるので、式 (4.5) に代入すると、

$$x = \frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b}} \tag{6.5}$$

となります。

特に、$a = 1, b = 1$ とすれば、それは B 尺の左の基線を D 尺の左の基線に合わせたことになり、それはすなわち B 尺の変わりに A 尺を用いたことになります。そのときの式は

$$x = \sqrt{c} \tag{6.6}$$

となります。つまり、D 尺と A 尺は、2 乗・平方根の関係にあります。

7　S 尺

7.1　メモリ

一般的な計算尺では、D 尺と対応することで三角関数を扱っています。その場合、D 尺のメモリは、$f(x) = \sin x$, $x_0 = \sin^{-1} 0.1 (\simeq 5.74°)$ となっています。これらより、メモリの式は、

$$y = l \log \frac{\sin x}{\sin\left(\sin^{-1} 0.1\right)} \tag{7.1}$$

$$= l \log \frac{\sin x}{0.1} \tag{7.2}$$

です。

7.2　S 尺が滑尺にある場合

式 (4.5) に代入すると、

$$x = \frac{a \sin c}{\sin b} \tag{7.3}$$

となります。S 尺の左の基線を D 尺の a に合わせることを考えると、$b = \sin^{-1} 0.1$ なので、

$$x = \frac{a \sin c}{\sin\left(\sin^{-1} 0.1\right)} \tag{7.4}$$

$$= 10a \sin c \tag{7.5}$$

となり、掛け算になっています。ここで 10 が掛けられているのは、位取りの関係で、sin が $0.1 \leq \sin x \leq 1$ の範囲だからです。

7.3　S 尺が固定尺にある場合

式 (5.5) に代入すると、

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{c}{b}\sin a\right) \tag{7.6}$$

となります。D 尺と S 尺を比較する場合を考えてみましょう。このとき、$a = \sin^{-1} 0.1$, $b = 1$ を代入すると、

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{c}{1}\sin\left(\sin^{-1} 0.1\right)\right) \tag{7.7}$$

$$= \sin^{-1}(0.1c) \tag{7.8}$$

$$c = 10\sin x \tag{7.9}$$

となり、やはり三角関数の対応となります。x は S 尺上に現れることに注意してください。

8　LL 尺

8.1　メモリ

ごくまれに、A 尺に対応する LL 尺もありますが、ほとんどの計算尺は D 尺対応なので、これについて見てみます。LL 尺は複数あります。多いもので LL3, LL2, LL1, LL0, LL00, LL01, LL02, LL03 の 8 本でしょう。それらは次の通りになっています。

$$f(x) = \ln x \qquad x_0 = e \qquad y = l\log\frac{\ln x}{1} \qquad (LL3) \tag{8.1}$$

$$f(x) = \ln x \qquad x_0 = e^{\frac{1}{10}} \qquad y = l\log\frac{\ln x}{0.1} \qquad (LL2) \tag{8.2}$$

$$f(x) = \ln x \qquad x_0 = e^{\frac{1}{100}} \qquad y = l\log\frac{\ln x}{0.01} \qquad (LL1) \tag{8.3}$$

$$f(x) = \ln x \qquad x_0 = e^{\frac{1}{1000}} \qquad y = l\log\frac{\ln x}{0.001} \qquad (LL0) \tag{8.4}$$

$$f(x) = -\ln x \qquad x_0 = e^{-\frac{1}{1000}} \qquad y = l\log\frac{-\ln x}{0.001} \qquad (LL00) \tag{8.5}$$

$$f(x) = -\ln x \qquad x_0 = e^{-\frac{1}{100}} \qquad y = l\log\frac{-\ln x}{0.01} \qquad (LL01) \tag{8.6}$$

$$f(x) = -\ln x \qquad x_0 = e^{-\frac{1}{10}} \qquad y = l\log\frac{-\ln x}{0.1} \qquad (LL02) \tag{8.7}$$

$$f(x) = -\ln x \qquad x_0 = e^{-1} \qquad y = l\log\frac{-\ln x}{1} \qquad (LL03) \tag{8.8}$$

式が煩雑なので、最も簡単な LL3 尺で話を進めていきましょう。LL3 尺では、メモリの式が $y = l \log \ln x$ となります。これが LL=LogLog といわれる所以です。

8.2 LL 尺を利用した指数対数計算

LL 尺は固定尺にあるので、式 (5.5) に代入します。

$$\ln x = \frac{c}{b} \ln a \tag{8.9}$$

$$\ln x = \ln a^{\frac{c}{b}} \tag{8.10}$$

$$x = a^{\frac{c}{b}} \tag{8.11}$$

となりますので、指数対数の計算ができます。

8.3 LL 尺を利用した逆数計算

LLn 尺 $(n = 0, 1, 2, 3)$ は、

$$y = l \log \frac{\ln x_1}{(\frac{1}{10})^{3-n}} \tag{8.12}$$

と書け、また、LL0n 尺 $(n = 0, 1, 2, 3)$ は、

$$y = l \log \frac{-\ln x_2}{(\frac{1}{10})^{3-n}} \tag{8.13}$$

と書けますので、LLn 尺と LL0n 尺をカーソル線を使って対応を見てみると、

$$l \log \frac{\ln x_1}{(\frac{1}{10})^{3-n}} = l \log \frac{-\ln x_2}{(\frac{1}{10})^{3-n}} \tag{8.14}$$

$$\frac{\ln x_1}{(\frac{1}{10})^{3-n}} = \frac{-\ln x_2}{(\frac{1}{10})^{3-n}} \tag{8.15}$$

$$\frac{\ln x_1}{(\frac{1}{10})^{3-n}} = \frac{-\ln x_2}{(\frac{1}{10})^{3-n}} \tag{8.16}$$

$$\ln x_1 = -\ln x_2 \tag{8.17}$$

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \tag{8.18}$$

となりますから、逆数を求めることができます。